

CPM 编码调制系统的基本性能限

黎昞¹, 魏帆¹, 白宝明¹, 马啸²

(1. 西安电子科技大学 通信工程学院, 陕西 西安 710071; 2. 中山大学 信息科学与技术学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对 CPM 系统的信道容量研究结果进行了综述, 并推导计算了 Rayleigh 衰落信道下 CPM 的容量分析方法与计算结果。首先回顾了 CPM 系统的基本概念及其有限状态马尔可夫模型, 并对 AWGN 信道下 CPM 的可达信息速率计算方法进行了讨论; 然后将其推广到 Rayleigh 衰落信道, 推导出在该信道下计算 CPM 容量的算法。考虑了接收端已知信道状态信息及未知信道状态信息 2 种情况。在导出容量计算的算法后, 通过 Monte Carlo 仿真给出了在 AWGN 及 Rayleigh 衰落信道下几种典型 CPM 方案的容量曲线。

关键词: 连续相位调制; 信道容量; Rayleigh 衰落信道; Monte-Carlo 仿真; 综述

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2014)03-0183-10

Fundamental performance limits of CPM coded modulation system

LI Bing¹, WEI Fan¹, BAI Bao-ming¹, MA Xiao²

(1. School of Telecommunications Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China;

2. School of Information Science and Technology, Sun Yat-Sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The study of the capacity of CPM systems was concerned with. The definition as well as the Finite-State-Machine (FSM) model of CPM was introduced. The development of calculating the capacity of CPM over AWGN channels was first reviewed. Then this methodology was generalized to deal with Rayleigh fading channels. The Monte-Carlo based algorithms were derived to calculate the capacity of CPM over Rayleigh fading channels with and without knowing channel-state-information(CSI). The proposed algorithms were justified by some numerical results of some typical CPM schemes.

Key words: continuous phase modulation; channel capacity; Rayleigh fading channel; Monte-Carlo simulation; review

1 引言

连续相位调制(CPM, continuous phase modulation)是一类具有较好功率与带宽效率的有记忆编码调制方式^[1]。CPM 信号的包络恒定, 适于采用高效的非线性 C 类放大器。而其相位平滑变化的特点使 CPM 信号的旁瓣功率低、谱密度集中, 从而有效地节省了带宽。因此从 20 世纪 80 年代开始^[1], CPM 得到了广泛的关注与深入的研究。目前在第二代移动通信系统 GSM^[2]、蓝牙^[3]、卫星通信^[4]、遥感^[5]、测距^[6]等诸多领域都有非常广泛的

应用。随着通信技术的发展, CPM 的应用越来越广泛并成为无线传输协议的标准^[7]和国内外的研究热点^[8-18]。

自从 Shannon 奠基性的论文^[19]发表以来, 信道容量便成为评价编码调制方案的理论依据之一。与传统无记忆调制方式不同, CPM 是一种有记忆非线性调制方式, 这使 CPM 调制系统的信道容量的计算非常困难^[1]。目前绝大部分研究集中于 CPM 编码调制方案的误码率分析和系统仿真, 然而对于 CPM 信道容量尤其是在衰落信道下的研究成果较少。

本文主要侧重于 CPM 基本性能限即信道容量

收稿日期: 2013-04-14; 修回日期: 2013-11-08

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)基金资助项目(2012CB316100); 国家自然科学基金资助项目(61372074, 61201140); 通信网信息传输与分发技术重点实验室开放课题基金资助项目(ITD-U12006)

Foundation Items: The National Key Basic Research Program of China (973 Program) (2012CB316100); The National Natural Science Foundation of China (61372074, 61201140); Open projects of Science and Technology on Information Transmission and Dissemination in Communication Networks Lab (ITD-U12006)

的研究。首先介绍 CPM 的基本概念并综述在 Gaussian 加性白噪声(AWGN)信道下 CPM 信道容量的计算方法。对于 Rayleigh 衰落信道, 分别给出在有信道状态信息(CSI)和无信道状态信息时信道容量的计算方法。最后, 本文计算了一些常用 CPM 方案在 AWGN 和 Rayleigh 衰落信道下的容量, 并分析了调制参数对信道容量的影响。

2 AWGN 信道下 CPM 的信道容量

2.1 连续相位调制的基本概念

如前所述, CPM 是一类有记忆的非线性调制技术, 其传输信号的基带表示式为

$$s(t, \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} e^{j\phi(t, \boldsymbol{\alpha})} \quad (1)$$

其中, T 为符号间隔, E_s 为每符号平均能量, $\boldsymbol{\alpha} = (\dots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots)$ 为发送的服从独立均匀分布(i.i.d.)的 M 阶信息符号序列 $\alpha_i \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$, 其中, $\phi(t, \boldsymbol{\alpha})$ 是携带信息符号序列 $\boldsymbol{\alpha}$ 的相位函数, 定义为

$$\phi(t, \boldsymbol{\alpha}) = 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i q(t - iT) \quad (2)$$

其中, $h=l/p$ 称为调制指数且 l 与 p 互质。相位脉冲 $q(t)$ 是一个连续单调函数, 且满足

$$q(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t \geq LT \end{cases} \quad (3)$$

在第 n 个符号区间, 相位函数 $\phi(t, \boldsymbol{\alpha})$ 可写为

$$\begin{aligned} \phi(t, \boldsymbol{\alpha}) &= 2\pi h \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i q(t - iT) \\ &= 2\pi h \sum_{i=n-L+1}^n \alpha_i q(t - iT) + h\pi \sum_{i=-\infty}^{n-L} \alpha_i \\ &= \theta(t, \boldsymbol{\alpha}) + \theta_n \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)右边第一项取决于信息符号 $(\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_{n-L+1})$, 称为相关状态(correlative state); 第二项是一个常数定义为相位状态(phase state)。因此, 在 $t = nT$ 时刻 CPM 信号的状态可以表示为相位状态和相关状态的组合, 记为

$$S_n = (\theta_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_{n-L+1}) \quad (5)$$

$t = (n+1)T$ 给定输入符号 α_n , 则状态转移到

$$S_{n+1} = (\theta_{n+1}, \alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-L+2}) \quad (6)$$

其中, $\theta_{n+1} = \theta_n + \pi h \alpha_n \text{ mod } 2\pi$ 。图 1 所示为 $h=1/2, M=2, L=2$, 相位脉冲为 REC 的 CPM(简记为 2CPM2REC, $h=1/2$) 的网格图(trellis), 该 CPM 有 8 个状态, 其中, 实线表示发送信息符号 -1 , 虚线表示发送 1 。

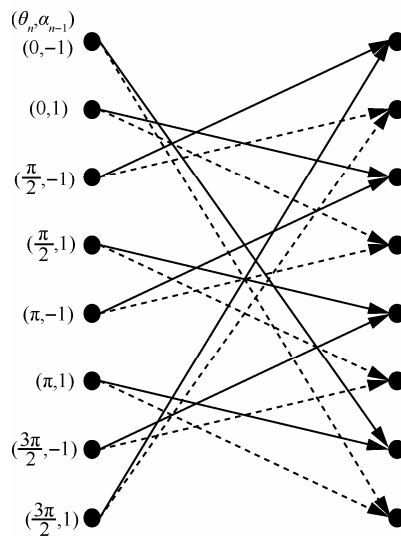


图 1 CPM 的网格

给定网格图, 则 CPM 的最佳检测可以利用 BCJR 等定义在网格图上的算法。CPM 另外一个重要特点是其状态转移具有马尔科夫性^[1,20], 这一特性为后续推导 CPM 信道容量带来了方便。

2.2 AWGN 信道下 CPM 的信道容量的计算

给定信道, Shannon 容量为发送符号与接收符号间可达信息速率的最大值, 其中最大值在所有可能的输入分布中取得。考虑计算如下的信息速率^[21]

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1, \dots, X_N; Y_1, \dots, Y_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1^N; Y_1^N) \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $X_1^N = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ 为信道输入过程, $Y_1^N = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ 为信道输出过程, 信道为离散有记忆信道。输入符号 X_i 服从独立均匀分布(i.i.d., independent and uniformly distribution)。对于 CPM 调制方式, 式(7)的简化解析式不但很难获得, 并且计算复杂度随 N 指数级增长。因此文献[1]退而求其次计算了 CPM 的信道截断速率(cut-off rate)。在本文中, 考虑在给定独立均匀分布的输入下, 计算 CPM 编码调制方案在 AWGN 和 Rayleigh 衰落信道下的可达

信息速率, 并将其定义为 CPM 的信道容量。

随着通信理论的发展, 有记忆信道得到了越来越多的关注与研究。大量文献研究了有记忆信道的信道容量并给出了一些简化算法。Hirt^[22]最先研究了二进制输入线性码间串扰(ISI, intersymbol interference)信道, 提出了基于 Monte-Carlo 仿真的计算 i.u.d. 信息速率的算法。同时期的 Zehavi 和 Wolf^[23]研究了输入受限的二进制对称信道的容量, 并给出了容量的几种下界及仿真结果。随后 Shamai 等人研究了离散 ISI 信道^[24,25]的容量并将其算法推广到输入受限的二进制和高斯信道^[26]。作为一种特殊的有记忆信道, Gilbert-Elliott 信道容量的计算首先被 Mushin^[27]等人解决。该结果被 Goldsmith 等人^[28]推广到更一般的有限状态马尔可夫信道, 并给出了信道容量及输入为独立同分布时的信息速率的表达式。然而, 上述文献提出算法的缺点在于无法精确计算编码调制系统的可达信道容量。因此, Arnold 等人^[2,29]提出了一类基于 BCJR^[30]和 SPA^[31]的数值计算方法。对于任何能用 FSM 刻画系统模型, 该类算法利用 Monte-Carlo 仿真可以得到给定模型的信道容量。在本文中将该类算法定义为 Arnold 算法。

CPM 调制能够用有限状态机(FSM, finite-state-machine)来刻画^[1], 其输入为信息符号, 输出为发送的调制符号。事实上假定 CPM 信号通过无记忆信道, 则 CPM 与无记忆信道整体可以用 FSM 刻画。该 FSM 对应的输入是信息序列, 而输出是接收信号。基于此模型和 Arnold 算法, 许多文献讨论了 CPM 在 AWGN 信道下容量的计算。

采用 Carson's Rule 定义的带宽, 文献[32]用 Arnold 算法得到了 CPM 信号在高信噪比(SNR, signal to noise ratio)下带宽效率的可达上界, 并给出了逼近此上界的几种 CPM 方案。文献[33]利用 Laurent 分解方法^[34]对 CPM 做线性分解, 然后将 CPM 信号和加性高斯白噪声(AWGN)信道看作一个多址接入信道(MAC, multiple access channel)。利用已知的 MAC 容量计算方法, 可以得出 CPM 信号在 AWGN 信道下的容量上限。Cheng 等^[35]首先用 Arnold 算法计算了若干 CPM 方案的容量, 然后使用穷搜所算法计算了对于给定的 N , 若干 CPM 调制方案的非相干信道容量。文献[36]则证明了通过调整输入符号的先验分布, 可以有效提高 CPM 的频谱效率。基于 CPM 的多用户系统出现后^[10], 文

献[37,38]给出了在频分复用(FDM, frequency division multiplexed)多用户系统的容量, 并指出通过优化调制参数可以提高信道容量。相对于大量仿真来获得 CPM 的误比特率(BER, bit-error-rate), 信道容量的计算量和复杂度要小得多, 但其对 CPM 性能的评估却同样精准和可靠。国内在该领域的主要研究集中于 Arnold 算法的应用与推广。例如文献[39]计算了 AWGN 信道下 CPM 的信道容量及其与调制参数的关系, 文献[40]利用 Laurent 分解简化了 Arnold 算法, 而文献[41,42]则分别探讨了在给定信道状态信息下衰落信道和协作通信系统中 CPM 信道容量的计算。

虽然侧重点不同, 上述文献的主要基础均为 Arnold 算法, 因此将其简单介绍如下。

2.2.1 有记忆信道容量的计算: Arnold 算法

假定信道输入序列 $X_1^N = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ 为独立均匀分布随机变量信源序列, 信道输出序列为接收序列 $Y_1^N = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, 相应的信道状态转移序列为 $S_0^N = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_N)$ 。用 $x_1^N = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $y_1^N = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ 和 $s_0^N = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_N)$ 分别表示 X_1^N , Y_1^N 和 S_0^N 的某一特定序列, 满足

$$p(x_1^N, y_1^N, s_0^N) = p(s_0) \prod_{i=1}^N p(x_i, y_i, s_i | s_{i-1}) \quad (8)$$

其中, $N > 0$, $p(x_i, y_i, s_i | s_{i-1})$ 和 i 无关。状态 S_i 从有限集合中取值, 随机过程 S_0^N 是各态历经的。信道输入符号取自一个有限集合, 信道输出符号 Y_i 从 R 中取值。

若以上假设成立, 则极限如式(7)存在。并且有 $-\text{lb}p(X_1^N)/N$ 以概率 1 收敛于熵速率 $H(X)$; $-\text{lb}p(Y_1^N)/N$ 以概率 1 收敛于微分熵速率 $h(Y)$; $-\text{lb}p(X_1^N, Y_1^N)/N$ 以概率 1 收敛于 $H(X) + h(Y|X)$ ^[43-45]。

因此, 可通过以下 3 个步骤数值计算 $I(X; Y) = h(Y) - h(Y|X)$:

- 1) 对长序列 x_1^N 和 y_1^N 进行无损采样;
- 2) 计算 $\text{lb}p(x_1^N)$, $\text{lb}p(y_1^N)$ 和 $\text{lb}p(x_1^N, y_1^N)$ 。如果知道 $h(Y|X)$ 的解析表达式, 仅需计算 $\text{lb}p(y_1^N)$;
- 3) 给定 N , 计算互信息的估计 $\hat{I}(X; Y) = -(\text{lb}p(y_1^N)p(x_1^N) - \text{lb}p(x_1^N, y_1^N))/N$; 若已知 $h(Y|X)$ 的解析表达式, 则计算 $\hat{I}(X; Y) = -(\text{lb}p(y_1^N))/N - h(Y|X)$;

显而易见, 算法的关键在步骤 2)。Arnold^[29]指出可以利用 BCJR 等递归算法^[30]求解步骤 2)中的各

概率值。

2.2.2 计算 CPM 的信道容量

如图 2 所示, CPM 调制器的输入为信息序列 X_1^N , 输出为调制信号 V_1^N 在接收端观察到的随机序列为 Y_1^N ; W_1^N 为 AWGN, 独立且服从 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 分布。所以有

$$Y_i = X_i + W_i \quad (9)$$

将 CPM 和无记忆信道整体看作一个有记忆信道并且用 FSM 来描述, 所以可以将 Arnold 算法推广来计算 CPM 系统的信道容量。遵循这一思路, 文献[35,46,47]等讨论了利用 Arnold 算法计算 CPM 系统的信道容量。

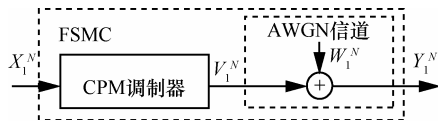


图 2 AWGN 信道下计算 CPM 信道容量的模型

沿用上一小节的定义并假定输入服从 i.u.d., 根据信道容量的定义有

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1^N, Y_1^N) = \sum_{i=1}^N H(x_i) - \sum_{i=1}^N H(x_i | x_1^{i-1}, y_1^N) \quad (10)$$

式(10)中第一项有

$$\frac{1}{N} H(X_1^N) = \text{lb}M \quad (11)$$

对第二项, 由条件熵定义可得

$$H(x_i | x_0^{i-1}, y_0^{N-1}) = -E \left[\text{lb}p(x_i | x_0^{i-1}, y_0^{N-1}) \right] \quad (12)$$

由贝叶斯法则

$$p(x_i | x_0^{i-1}, y_0^{N-1}) = \frac{p(x_i, x_0^{N-1}, y_0^{N-1})}{\sum_{x_i} p(x_i, x_0^{i-1}, y_0^{N-1})} \quad (13)$$

考虑到状态序列具有马尔科夫性, 可以递归地计算式(13)。为了方便计算做如下定义

$$\alpha(s_i) = p(s_i, y_0^{i-1}, x_0^{i-1}) \quad (14)$$

$$\beta(s_{i+1}) = p(y_{i+1}^{N-1} | s_{i+1}) \quad (15)$$

$$\gamma(s_i, s_{i+1}) = p(y_i, s_{i+1} | s_i, x_i) \quad (16)$$

根据 BCJR 算法, $\alpha(s_i)$ 可由前向递归得到

$$\alpha(s_{i+1}) \propto \sum_{s_i} \alpha(s_i) \gamma(s_i, s_{i+1}) \quad (17)$$

类似地, $\beta(s_i)$ 可由后向递推得出

$$\beta(s_i) \propto \sum_{s_{i+1}} \beta(s_{i+1}) \gamma(s_i, s_{i+1}) \quad (18)$$

若未知起始和中止状态, $\alpha(s_0)$ 和 $\beta(s_N)$ 的初始化服从以下规定:

$$\alpha(s_0) = \beta(s_N) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{pM^{L-1}} \quad (19)$$

而状态转移概率为

$$\begin{aligned} \gamma(s_{i-1}, s_i) &= p(s_i, y_i | s_{i-1}) \\ &= p(y_i | s_{i-1}, s_i) p(s_i | s_{i-1}) \\ &= p(y_i | v_i) p(x_i) \\ &= p(x_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\|y_i - v_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

综上, 有

$$p(x_i, x_0^{i-1}, y_0^{N-1}) = \sum_{(s_i, s_{i+1})} \alpha(s_i) \beta(s_{i+1}) \gamma(s_i, s_{i+1}) \quad (21)$$

将式(21)代入式(13)则得到 $p(x_i | x_0^{i-1}, y_0^{N-1})$ 的数值解。另外, 比特信噪比 E_b/N_0 和符号信噪比 E_s/N_0 之间存在如下关系:

$$E_b/N_0 = (E_s/N_0)/C \quad (22)$$

而综合式(10)~式(12)则得到信道容量的一个近似估计。显而易见, Arnold 算法通过引入 BCJR 等递归算法使式(12)的计算复杂度从 N 的指数级降低到线性级。根据 Monte-Carlo 仿真原理, 当 $N \rightarrow \infty$ 时该估计值以概率 1 收敛于真实值。事实上, 当 N 足够大时 ($N \geq 5000$), 增加 N 仅仅改善了计算精度而对于结算结果的影响几乎可以忽略。

根据 Arnold 算法, 计算了表 1 所列的 CPM 系统的容量。相应的数值结果在图 3 中给出。

计算结果显示, 给定调制阶数 M , 随着 SNR 的增加信道容量 C 收敛于值 $\text{lb}M$ 。但是记忆长度 L 、调制指数 h 和相位脉冲 $q(t)$ 决定了 C 的收敛速度。当 h 较大时, C 收敛较快; L 越大收敛愈慢, 但当 h 较小时收敛速度的差异很细微(如图 3(d)所示)。另外值得注意的一点是, 在调制阶数 M 和 L 相同时, 若传输码率小于 C , 各 CPM 所需的信噪比

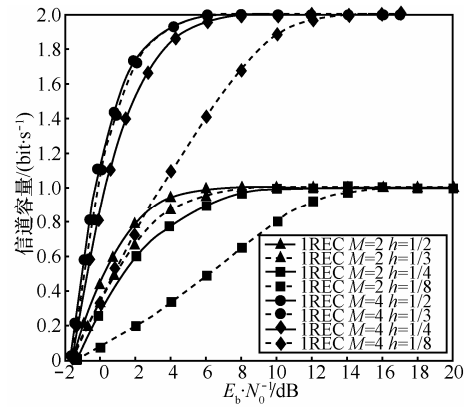
其实差异不大。以 4CPM2RC 系统为例，当码率为 1 时，3 个方案之间所需信噪差异比很小。但是网格图的状态数却不一样，因此在构造基于 CPM 的编码调制系统时，可以选择复杂度较低(p 较小)的系统。

表 1 CPM 的调制参数

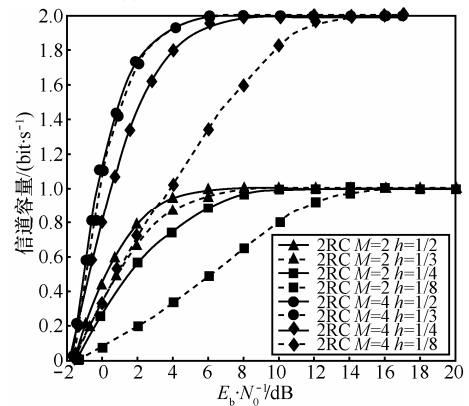
CPM 方案	调制阶数 M	调制指数 h	FSM 状态数
1REC	2	1/2 (MSK)	4
		1/3	6
		1/4	8
		1/8	16
	4	1/2	4
		1/3	6
		1/4	8
		1/8	16
2RC	2	1/2	8
		1/3	12
		1/4	16
	4	1/8	32
		1/2	8
		1/3	24
3RC	2	1/4	32
		1/2	16
		1/3	24
	4	1/2	64
		1/3	96
		1/4	128

3 Rayleigh 信道下 CPM 的信道容量

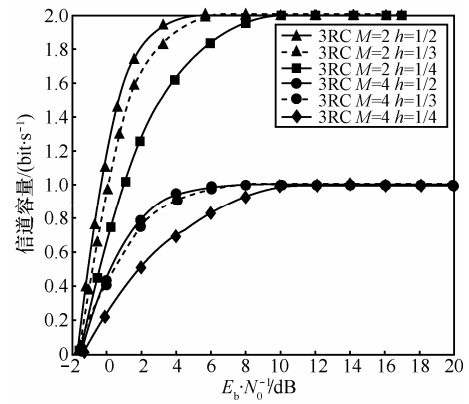
上节总结了 CPM 信号在 AWGN 信道下的容量计算并据此计算了一些 CPM 方案的信道容量。在本节推导和计算独立 Rayleigh 衰落信道下 CPM 的信道容量。在此模型下，考虑了 2 种不同的情况：相干信道和非相干信道，即接收端已知 CSI 和未知 CSI。对应的信道模型如图 4 所示。



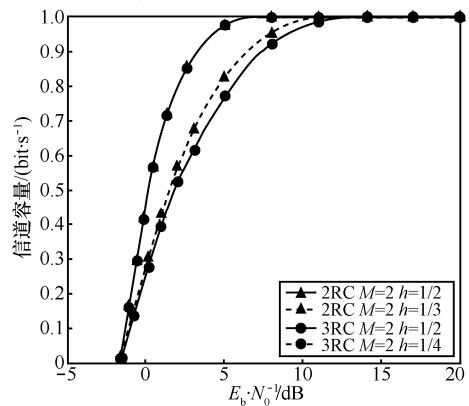
(a) 1REC-CPM 的信道容量



(b) 2RC-CPM 的信道容量



(c) 3RC-CPM 的信道容量



(d) AWGN 信道下 2RC 和 3RC 的容量比较
图 3 CPM 在 AWGN 信道下的信道容量

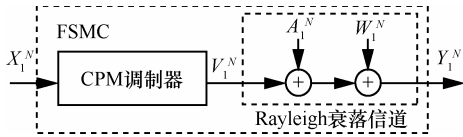


图 4 Rayleigh 衰落信道下计算 CPM 信道容量的模型

在本文中假设 Rayleigh 衰落系数 A_1^N 为独立同分布(i.i.d.)。与 AWGN 信道的模型类似, 将物理信道和 CPM 调制器整体看作一个有记忆虚拟信道。因此, 该虚拟信道依然可以用 FSM 描述。沿用前文的记号有

$$Y_i = A_i X_i + W_i, 1 \leq i \leq N \quad (23)$$

3.1 CSI 已知时的信道容量

由于接收端已知 CSI, 所以推导与 AWGN 信道非常类似, 为

$$\begin{aligned} C &= I(X; Y, A) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1^N; Y_1^N | A_1^N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{H(X_1^N | A_1^N) - H(X_1^N | Y_1^N, A_1^N)}{N} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

其中,

$$\frac{1}{N} H(X_1^N | A_1^N) = \frac{1}{N} H(X_1^N) = \text{lb} M \quad (25)$$

由于 S_0^N 为马尔可夫随机过程, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} H(X_1^N | Y_1^N, A_1^N) &= \frac{1}{N} H(S_0^N | Y_1^N, A_1^N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(S_i | S_0^{i-1}, Y_1^N, A_1^N) \end{aligned} \quad (26)$$

且

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H(S_i | S_0^{i-1}, Y_1^N, A_1^N) \\ &= H(s_i | s_{i-1}, Y_1^N, A_1^N) \\ &= E \left[\text{lb} p(s_i | s_{i-1}, Y_1^N, A_1^N) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

类似地, 利用马尔科夫性可以将式(27)中的概率函数化简为

$$\begin{aligned} p(s_i | s_{i-1}, Y_1^N, A_1^N) &= p(s_i | s_{i-1}, Y_i^N, A_i^N) \\ &= \frac{p(s_i, Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N)}{\sum_{s_i} p(s_i, Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N)} \end{aligned} \quad (28)$$

为了能够递归地计算 $p(s_i, Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N)$, 做如下规定

$$\begin{aligned} p(s_i, Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N) &= p(s_i, Y_{i+1}^N, Y_i | s_{i-1}, A_i^N) \\ &= p(Y_{i+1}^N | s_i, A_{i+1}^N) p(s_i, Y_i | s_{i-1}, A_i) \\ &= \beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i) \end{aligned} \quad (29)$$

其中,

$$\beta(s_i) = p(Y_{i+1}^N | s_i, A_{i+1}^N) \quad (30)$$

$$\gamma(s_{i-1}, s_i) = p(s_i, Y_i | s_{i-1}, A_i) \quad (31)$$

根据定义有

$$\begin{aligned} \gamma(s_{i-1}, s_i) &= p(Y_i | v_i, A_i) p(x_i) \\ &= p(x_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\|Y_i - A_i v_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

进一步推导发现

$$\begin{aligned} \beta(s_{i-1}) &= p(Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N) \\ &= \sum_{s_i} p(s_i, Y_i^N | s_{i-1}, A_i^N) \\ &= \sum_{s_i} p(Y_{i+1}^N | s_i, A_{i+1}^N) p(s_i, Y_i | s_{i-1}, A_i) \\ &= \sum_{s_i} \beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i) \end{aligned} \quad (33)$$

即 $\beta(s_i)$ 可以递归地计算, 实际上对照前文 AWGN 信道下的算法, 这正是 BCJR 的后向递归过程。把式(30)和式(31)代入式(28), 有

$$p(s_i | s_{i-1}, Y_1^N, A_i^N) = \frac{\beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i)}{\sum_{s_i} \beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i)} \quad (34)$$

综上, 可以看出, 在 Rayleigh 衰落信道下 CPM 的信道容量依然可以通过 BCJR 递归计算得到。这使计算复杂度大大降低。图 5 比较了表 1 中的 CPM 系统当 CSI 已知时在 Rayleigh 衰落信道下的信道容量。同样的, 有 $E_b / N_0 = (E_s / N_0) / C$ 。

对比图 5 和图 3, 可以看到虽然信道容量依然可以达到 $\text{lb} M$, 但其所需的 SNR 相对于 AWGN 信道而言则高一些。至于调制参数对信道容量的影响, 可以得到与 AWGN 信道下类似的结论, 在此不再重复。

3.2 未知 CSI 时的 CPM 容量计算

由于 CSI 本身是随机变量, 接收端很难获知其信息或对其进行估计。因此, 需要研究接收端未知 CSI 时, 即非相干信道下的信道容量。沿用前文的符号定义, 可以得到

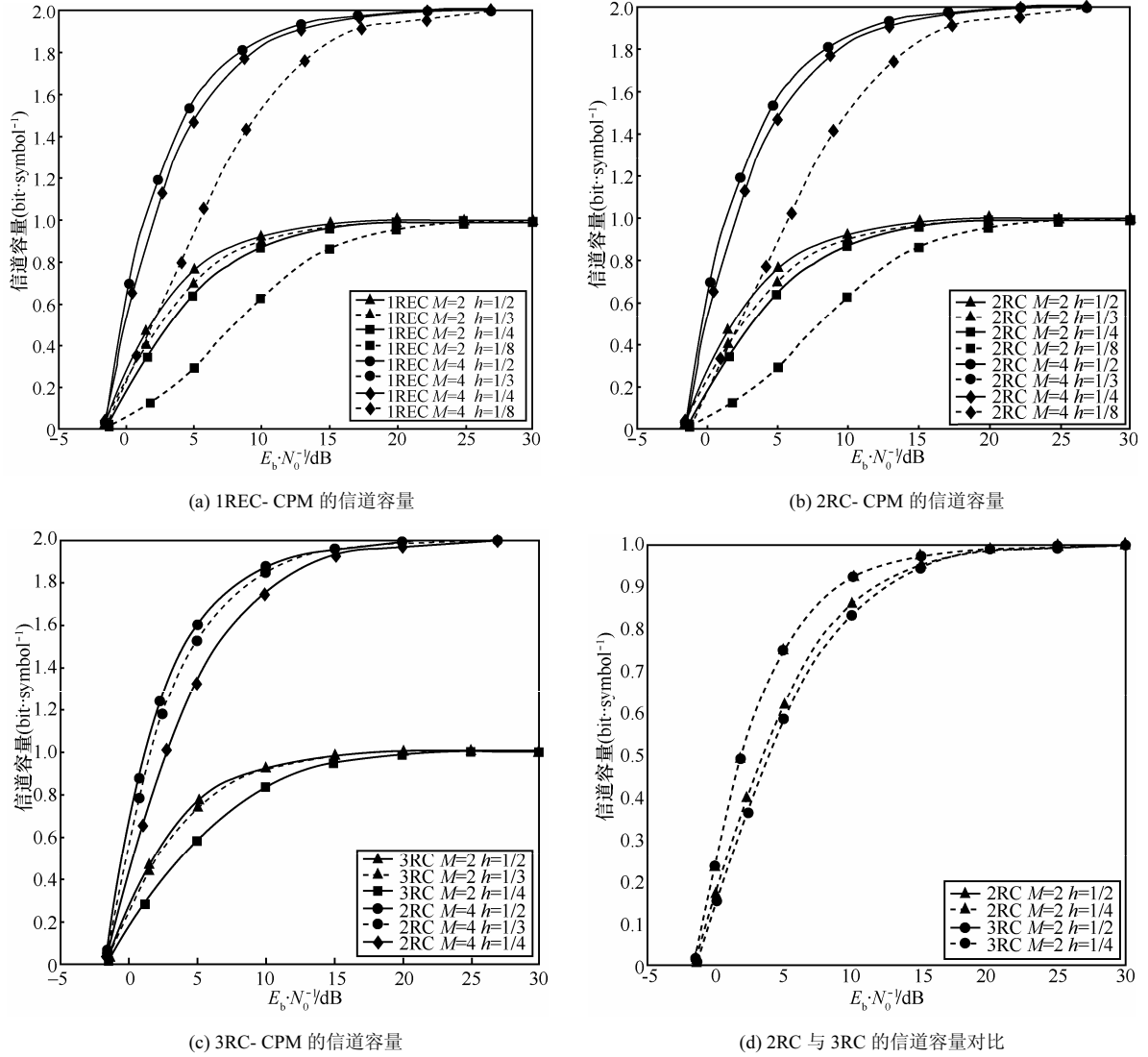


图 5 CSI 已知时 CPM 在 Rayleigh 衰落信道下的容量

$$C = I(X; Y)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(X_1^N; Y_1^N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} H(X_1^N) - \frac{1}{N} H(X_1^N | Y_1^N) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\text{lb} M - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E \left[H(S_i | S_{i-1} = s_{i-1}, Y_1^N = y_1^N) \right] \right] \end{aligned} \quad (35)$$

根据熵的定义有

$$\begin{aligned} &H(S_i | S_{i-1} = s_{i-1}, Y_1^N = y_1^N) \\ &= E[\text{lb} p(S_i | S_{i-1} = s_{i-1}, Y_1^N = y_1^N)] \end{aligned} \quad (36)$$

由贝叶斯公式

$$p(s_i | s_{i-1}, y_1^N) = \frac{p(s_i, y_i^N | s_{i-1})}{\sum_{s_i} p(s_i, y_i^N | s_{i-1})} \quad (37)$$

类似地，可以得到如下结果

$$p(s_i, y_i^N | s_{i-1}) = \beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i) \quad (38)$$

$$p(s_i | s_{i-1}, y_1^N) = \frac{\beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i)}{\sum_{s_i} \beta(s_i) \gamma(s_{i-1}, s_i)} \quad (39)$$

$$\gamma(s_{i-1}, s_i) = p(y_i | v_i) p(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} p(y_i | v_i, a_j) p(a_j) da_j \quad (40)$$

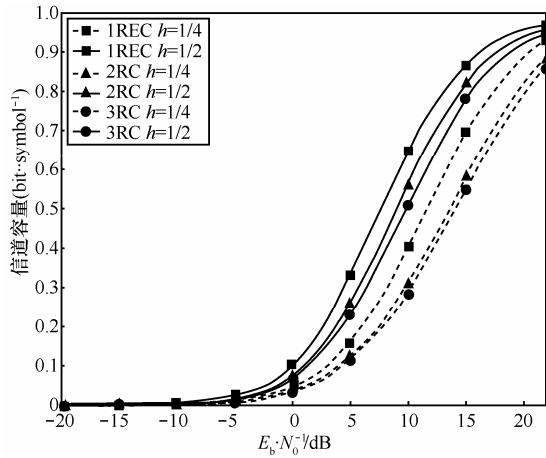
式(40)的难点在于计算积分表达式。然而，该积分结果不是一个闭合表达式，因此需要找到式(40)的精确数值解。根据大数定理和 Monte-Carlo 方法^[20]，信道状态转移概率有如下的表达式：

$$\frac{1}{N_w} \sum_{n=1}^{N_w} p(y_i | v_i, a_m) = \frac{1}{N_w} \sum_{n=1}^{N_w} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\|y_i - a_m v_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (41)$$

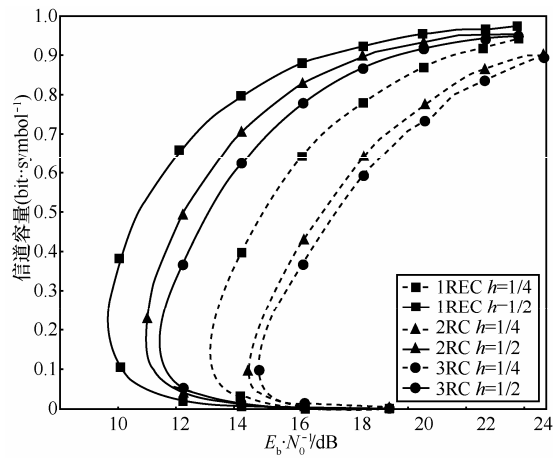
图 6 给出了几种 CPM 方案在 Rayleigh 衰落信道接下收端未知 CSI 时的容量曲线, 其中, $E_b/N_0 = E_s/N_0/C$ 。对比图 5, 可以看到, 在使用最佳接收机时, 未知与已知 CSI 的信道容量是相同的。但要达到该

容量未知 CSI 的接收机需要更高的信噪比。

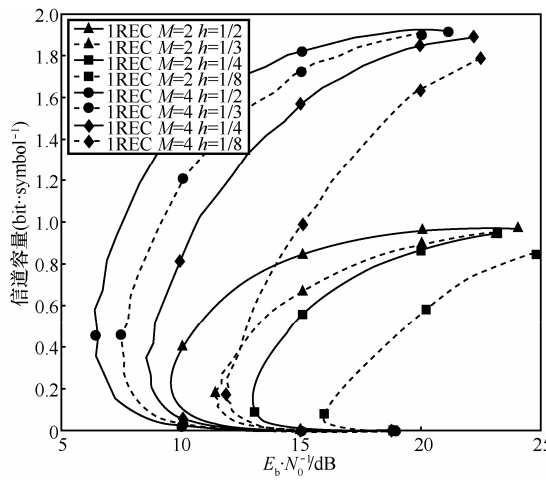
从图 6(a)中可以看出, 给定其他调制参数, 随着调制指数 h 的增大, CPM 达到无误传输所需要的信噪比降低, 即能量效率提高。事实上, 因为调制



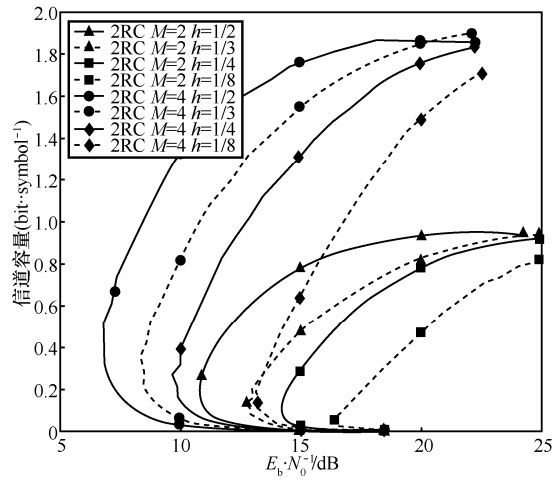
(a) 信道容量与 E_s/N_0 的关系



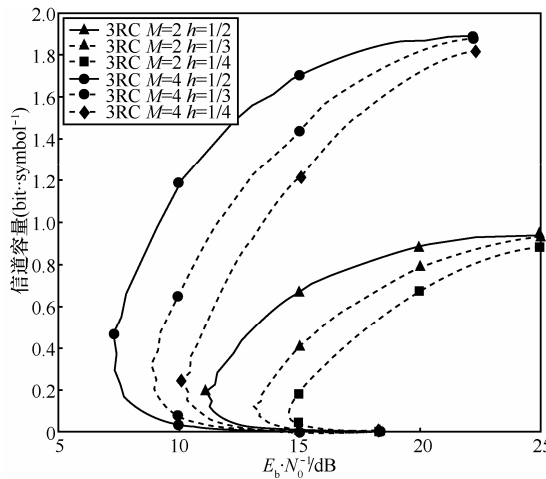
(b) 信道容量与 E_b/N_0 的关系



(c) 1REC-CPM 的信道容量



(d) 2RC-CPM 的信道容量



(e) 3RC-CPM 的信道容量对比

图 6 CSI 未知时 CPM 在 Rayleigh 衰落信道下的容量

指数决定了一个符号周期内 CPM 相位变化的大小, 调制指数越大, 相位变化越大, 信号越容易区分。此外, 与收端已知信道状态信息时的情况相比, 相同参数下, 即调制阶数 M 、记忆长度 L 、频率脉冲、调制指数都相同时, 接收端未知 CSI 时 CPM 达到无误传输所需要的信噪比相对于已知 CSI 要大很多。最后观察图 6(b), 可以看到给定调制参数, 信道容量随着 E_s/N_0 的增加而提高; 但经过 $E_b/N_0 = (E_s/N_0)/C$ 的转换后, 信道容量 C 与 E_b/N_0 的关系曲线呈“C”形曲线, 这意味着对每一个 CPM 方案存在一个最小 E_b/N_0 使信息速率可达, 这种现象被称之为非相干合并代价^[44], 在此情况下, 降低信息速率并不一定提高能量效率。

此外, 也给出了表 1 中的 CPM 方案在 CSI 未知时的信道容量。可以观察到:

1) 随着信噪比的增加, 未知 CSI 的信道容量最终逼近于已知 CSI 的信道容量, 但其所需的信噪比远远高于后者;

2) 所有的容量曲线都表现出“C”形曲线, 并且调制指数越大, 曲线的曲率越大;

3) 无论是 AWGN 信道还是 Rayleigh 衰落信道, 调制参数 M 、 L 、 h 和频率脉冲等参数对信道容量的作用是类似的;

4) 信道容量的一个重要作用是考察不同码率的编码调制方案时预测其所需信噪比。例如在信噪比 $E_b/N_0=14$ dB 时, 由图 6(c)可知, 当码率为 0.8 结合 $M=2, h=0.5$ 方案和码率为 0.4 结合 $M=2, h=0.5$ 方案都可以达到 0.8 bit 的信道容量。类似的结果也可以在图 6(d)中看到。

4 结束语

本文系统阐述了 CPM 的相关基本概念, 回顾了有记忆信道下计算信息速率的算法, 此算法基于 Monte Carlo 仿真, 采用了 BCJR 算法的前向递归方法计算有限状态信道模型的信息速率。在此基础上, 重点讨论了 CPM 的基本性能限, 通过系统建模, 建立起 CPM 在 2 种无记忆信道(AWGN 信道和 Rayleigh 衰落信道)下的有限状态马尔科夫信道模型, 之后分别详细推导了在这 2 种信道下, 利用 BCJR 算法的后向递推计算 CPM 容量的算法。通过 Monte-Carlo 仿真, 给出了在 AWGN 信道和 Rayleigh 衰落信道下 CPM 信息容量的若干结果并讨论了调制参数对信道容量的影响。计算结果显示, 在

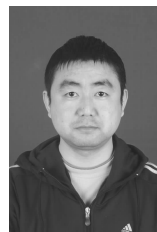
AWGN 和 Rayleigh 衰落信道下, M 阶调制 CPM 的信道容量均逼近于 $\ln M$ 。但是衰落信道所需的信噪比远远大于 AWGN 信道, 并且当信道状态信息未知时的信道容量表现出非相干合并代价。

参考文献:

- [1] ANDERSON J B, AULIN T, SUNDBERG C E. Digital Phase Modulation[M]. New York: Plenum Press, 1986.
- [2] MOULY M, PAUTET M B. The GSM System for Mobile Communications[M]. Paris: Cell & Sys, 1992.
- [3] Bluetooth Organization. Specification adopted documents[EB/OL]. <https://www.bluetooth.org/en-us/specification/adopted-specifications>.
- [4] MIL-STD-188-181B. Interoperability Standard for Single Access 5-kHz and 25-kHz UHF Satellite Communications Channels[S]. 1999.
- [5] PERRINS E, RICE M. Reduced complexity detectors for multi-h CPM in aeronautical telemetry[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 286-300.
- [6] ORR R S, DIVSALAR D. CPM/PN modulation and ranging for bandwidth-limited multiple access links[A]. Proceedings of Aerospace Conference[C]. Big Sky, MT, 2011. 1-27.
- [7] CHUGG K M, GRAY P, WARD R. Flexible Coding for 802.11n MIMO Systems[S]. 2004.
- [8] MOQVIST P, AULIN T M. Serially concatenated continuous phase modulation with iterative decoding[J]. IEEE Transactions on Communications, 2011, 49(11):1901-1915.
- [9] MOQVIST P. Multiuser Serially Concatenated Continuous Phase Modulation[D]. Sweden: Chalmers University of Technology, 2002.
- [10] MING X, AULIN T M. Serially concatenated continuous phase modulation with convolutional codes over rings[J]. IEEE Transactions on Communications, 2006, 54(8): 1385-1396.
- [11] PEROTTI A, TARABLE A, BENEDETTO S. Capacity achieving CPM schemes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010,56(4): 1521-1541.
- [12] AMAT A, NOUR C A, DOUILLARD C. Serially concatenated continuous phase modulation for satellite communications[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(6): 3260-3269.
- [13] 孙锦华, 李建东, 金力军. 串行级联 CPM 的一种简化状态 SISO 迭代译码算法[J]. 中国科学, 2007, 37(8): 1055-1065.
SUN J H, LI J D, JIN L J. A simplified state SISO iterative decoding algorithm for serially concatenated continuous phase modulation[J]. Science in China, 2007, 37(8): 1055-1065.
- [14] BARBIERI A, FERTONANI D, COLAVOLPE G. Spectrally-efficient continuous phase modulations[J].IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(3): 1564-1572.
- [15] BOKOLAMULLA D, AULIN T. Multiuser detection for continuous phase modulation over Rayleigh fading channels[J]. IEEE Communications Letters, 2005, 9(10): 906-908.
- [16] MOQVIST P, AULIN T. Multiuser serially concatenated continuous phase modulation[A]. Proceedings of International Symposium on Turbo Codes[C]. Brest, France, 2003. 211-214.
- [17] REMLEIN P, JASINSKI M, PEROTTI A. Receiver algorithm for coded multiuser CPM systems[J]. IEEE Electronic Letters, 2012, 48(11): 633-635.
- [18] HAZEWINKEL M. Encyclopedia of Mathematics[M]. New York: Springer, 2001
- [19] SHANNON C E. A mathematical theory of communication[J]. The Bell System Technical Journal, 1948, 27:379-423, 623-656.
- [20] GRIMMETT G R, STIRZAKER D R. Probability and Random Proc-

- esses[M]. Oxford: Oxford University Press, 2001.
- [21] COVER T, THOMAS J. Elements of Information Theory[M]. New York: Wiley, 1991.
- [22] HIRT W. Capacity and Information Rates of Discrete-Time Channels with Memory[D]. Switzerland: Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1988.
- [23] ZEHAVERI E, WOLF J K. On runlength codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1988, 34(1): 45-54.
- [24] SHAMAI (SHITZ) S, OZAROW L H, WYNER A D. Information rates for a discrete-time Gaussian channel with intersymbol interference and stationary inputs[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1991, 37(6): 1527-1539.
- [25] SHAMAI (SHITZ) S, LAROIA R. The intersymbol interference channel: lower bounds on capacity and channel precoding loss[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(5):1388-1404.
- [26] SHAMAI (SHITZ) S, KOFMAN Y. On the capacity of binary and Gaussian channels with run-length-limited inputs[J]. IEEE Transactions on Communications, 1990, 38(5):584-594.
- [27] MUSHKIN M, BAR-DAVID I. Capacity and coding for the Gilbert-Elliott channel[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1989, 35(6):1277-1290.
- [28] GOLDSMITH A J, VARAIYA P P. Capacity, mutual information, and coding for finite-state Markov channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1996, 42(3):868-886.
- [29] ARNOLD D, LOELIGER H A, VONTOBEL P A. Simulation-based computation of information rates for channels with memory[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(8):3498-3508.
- [30] BAHL L, COCKE J, JELINEK F. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(2):284-287.
- [31] KSCHISCHANG F R, FREY B J, LOELIGER H A. Factor graphs and the sum-product algorithm[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2001, 47(2):498-519.
- [32] KUO C H, CHUGG K M. On the bandwidth efficiency of CPM signals[A]. Proceedings of IEEE Military Communications Conference (MILCOM)[C]. Monterey, CA, 2004. 218-224.
- [33] YU K, GOLDSMITH A. Linear models and capacity bounds for continuous phase modulation[A]. IEEE International Conference on Communications(ICC)[C]. New York, 2002.722-726.
- [34] LAURENT P A. Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses[J]. IEEE Transactions on Communications, 1986, 34(2):150-160.
- [35] CHENG S, VALENTI M C, TORRIERI D. Coherent and multi-symbol noncoherent CPFSK: capacity and code design[A]. Proceedings of IEEE Military Communications Conference(MILCOM)[C]. Orlando, FL, 2007.1-7.
- [36] KUO C H, CHUGG K M. Improving the bandwidth efficiency and of CPM signals via shaping and iterative detection[A]. Proceedings of IEEE Military Communications Conference(MILCOM)[C]. Atlantic City, NJ, 2005.596-602.
- [37] BARBIERI A, FERTONANI D, COLAVOLPE G. Spectrally-efficient continuous phase modulations[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2009, 8(3):1564-1572.
- [38] PIEMONTESE A, AMAT A G I, COLAVOLPE G. Information-theoretic analysis and practical coding schemes for spectrally efficient FDM-CPM systems[A]. Proceedings of 6th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC)[C]. Brest, France, 2010. 275-279.
- [39] 黄梦羽. CPM 编码调制系统的信息容量限研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2011.
- HUANG M Y. Research on Information Capacity of CPM Coded Modulation System[D]. Xi'an: Xidian University, 2011.
- [40] 霍翠平, 牛凯. 基于 BCJR 算法的低复杂度 CPM 信号信道容量值计算[EB/OL]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201112-53.html>, 2011.
- HUO C P, NIU K. Low complexity CPM channel capacity calculation based on BCJR algorithm[EB/OL]. <http://www.paper.edu.cn/releasepaper/content/201112-53.html>, 2011.
- [41] 王珏. 多维 TCM 及 CPM 编码调制技术研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2011.
- WANG J. Research on Multidimensional Trellis-Coded Modulation and Continuous-Phase Modulation Techniques[D]. Xi'an: Xidian University, 2011.
- [42] 胡均秀, 雷霞, 李强. 基于连续相位调制的协同分集系统在平坦衰落信道下的容量分析[J]. 信号处理, 2011, 27(7):1076-2081.
- HU D X, LEI X, LI Q. Capacity for cooperative diversity system based on continuous phase modulation in flat fading channel[J]. Signal Processing, 2011, 27(7): 1076-2081.
- [43] BARRON A R. The strong ergodic theorem for densities: generalized Shannon-McMillan-Breiman theorem[J]. The Annals of Probability, 1985, 13(4): 1292-1303.
- [44] LEROUX B G. Maximum-likelihood estimation for hidden Markov models[J]. Stochastic Processes and their Applications, 1992, 40(1):127-143.
- [45] EPHRAIM Y, MERHAV N. Hidden Markov processes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2002, 48(6): 1518-1569.
- [46] PADMANABHAN K, RANGANATHAN S, SUNDARAVARADHAN S P. General CPM and its capacity[A]. Proceedings of International Symposium on Information Theory[C]. Adelaide, Australia, 2005. 750-754.
- [47] CHENG S, SEHSHADRI R I, VALENTI M. The capacity of noncoherent continuous-phase frequency shift keying[A]. Proceedings of 41st Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)[C]. Baltimore, MD, 2007.396-401.
- [48] STARK W E. Capacity and cutoff rate of noncoherent FSK with nonselective Rician fading[J]. IEEE Transactions on Communications, 1985, 33(11):1153-1159.

作者简介:



黎昞 (1983-), 男, 陕西咸阳人, 西安电子科技大学博士生, 主要研究方向为编码调制、多用户信息检测。

魏帆 (1989-), 男, 陕西西安人, 西安电子科技大学硕士生, 主要研究方向为编码调制、无线通信。

白宝明 (1966-), 男, 山西大同人, 西安电子科技大学教授、博士生导师, 主要研究方向为无线通信、信道编码、量子通信。

马啸 (1968-), 男, 河南温县人, 中山大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信息理论与信道编码理论与技术以及它们在数字通信系统和数字记录(存储)系统中的应用。